Universität
Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik II

Herbstsemester 2019

Vorlesung 5

Prof. Dr. Katia Saporiti

Übersicht

I. Prädikatenlogische Formalisierungen (Wiederholung)
   – All- und Existenzaussagen
   – Äquivalente All- und Existenzaussagen

II. Mehrfaches Quantifizieren
   – Quantorentausch
   – Quantorenverschiebungen

III. Beweise im Baumkalkül (Wiederholung)

All- und Existenzaussagen in der prädikatenlogischen Sprache PL

(1) Alles fliesst.

$\forall xPx$ — *Px: x fliesst.*

(2) Alles fliesst und Heraklit ist ein Philosoph.

$\forall xPx \land Qa$

Px: x fliesst.
a: Heraklit
Qx: x ist ein Philosoph.

(3) Philosophen sind sterblich.

$\forall x(Px \rightarrow Qx)$

Px: x ist ein Philosoph.
Qx: x ist sterblich.

(4) Irgendetwas stinkt.

$\exists xPx$ — Px: x stinkt.

(5) Manche Dinge stinken, und Diogenes ist ein Philosoph.

$\exists xPx \land Qa$

Px: x stinkt.
a: Diogenes
Qx: x ist ein Philosoph.

(6) Manche Philosophen waschen sich nicht.

$\exists x(Px \land \neg Qxx)$

Px: x ist ein Philosoph.
Qxy: x wäscht y.

All- und Existenzaussagen in der prädikatenlogischen Sprache PL

(7) Löwen sind stark und schnell.

$\forall x(Px \to Qx \land Rx)$

Px: x ist ein Löwe.
Qx: x ist stark.
Rx: x ist schnell.

(8) Es gibt Philosophen, die stinken.

$\exists x(Px \land Qx)$

Px: x ist ein Philosoph.
Qx: x stinkt.

(9) Die Hühner des Nachbarn sind hübsch.

$\forall x(Px \land Qxa \to Rx)$

a: der Nachbar
Px: x ist ein Huhn.
Qxy: x gehört y.
Rx: x ist hübsch.

(10)Karlchen bekommt eine ¼-Geige geschenkt.

$\exists x(Px \land Qax)$

a: Karlchen
Px: x ist eine ¼-Geige.
Qxy: x bekommt y geschenkt.

(11)Annemarie besitzt kein Auto.

$\neg\exists x(Px \land Qax)$

$\forall x(Qax \to \neg Px)$

$\forall x(Px \to \neg Qax)$

a: Annemarie
Px: x ist ein Auto.
Qxy: x besitzt y.

(12)Nicht alle Zahlen sind Primzahlen.

$\exists x(Px \land \neg Qx)$

$\neg\forall x(Px \to Qx)$

Px: x ist eine Zahl.
Qx: x ist eine Primzahl

Negierte All- und Existenzaussagen

– Eine negierte Allaussage ist eine Existenzaussage.
– Eine negierte Existenzaussage ist eine Allaussage.
– Entsprechend können All- und Existenzaussagen in PL jeweils sowohl mit Hilfe eines Existenz- als auch mit Hilfe eines Allquantors formalisiert werden.
– Die Formalisierungen mit Hilfe des All- und mit Hilfe des Existenzquantors sind logisch äquivalent.

Beispiel:

Die prädikatenlogische Struktur von „Alle Menschen sind sterblich" kann angegeben werden mit

$$\forall x(Px \rightarrow Qx)$$

oder mit

$$\neg\exists x(Px \wedge \neg Qx)$$

Äquivalente All- und Existenzaussagen

(1) Alles ist wirklich. (Nichts ist nicht wirklich.)

$\forall x Px \Leftrightarrow \neg\exists x \neg Px$

(2) Nichts ist wirklich. (Alles ist nicht wirklich.)

$\neg\exists x Px \Leftrightarrow \forall x \neg Px$

(3) Hunde sind Tiere. (Kein Hund ist kein Tier.)

$\forall x (Px \rightarrow Qx) \Leftrightarrow \neg\exists x (Px \wedge \neg Qx)$

(4) Keine Katze ist ein Vogel. (Katzen sind keine Vögel.)

$\neg\exists x (Px \wedge Qx) \Leftrightarrow \forall x (Px \rightarrow \neg Qx)$

(5) Nicht alles währt ewig. (Manches währt nicht ewig.)

$\neg\forall x Px \Leftrightarrow \exists x \neg Px$

(6) Manches währt ewig. (Nicht alles währt nicht ewig.)

$\exists x Px \Leftrightarrow \neg\forall x \neg Px$

(7) Manche Hunde sind treu. (Nicht alle Hunde sind nicht treu.)

$\exists x (Px \wedge Qx) \Leftrightarrow \neg\forall x (Px \rightarrow \neg Qx)$

(8) Manche Hunde sind nicht treu. (Nicht alle Hunde sind treu.)

$\exists x (Px \wedge \neg Qx) \Leftrightarrow \neg\forall x (Px \rightarrow Qx)$

Mehrfaches Quantifizieren

1. Jeder verachtet jemanden. / Niemand verachtet niemanden.

$\forall x \exists y Pxy \Leftrightarrow \neg \exists x \forall y \neg Pxy$

2. Es gibt jemanden, den verachten alle.

$\exists x \forall y Pyx$

Pxy: x verachtet y. (Der Individuenbereich sei eingeschränkt und enthalte nur Personen.)

3. Jeder Schüler besitzt ein Fahrrad.

$\forall x (Px \rightarrow \exists y (Qy \wedge Rxy))$

Px: x ist ein Schüler. Qx: x ist ein Fahrrad.
Rxy: x besitzt y.

4. Kein Schüler kennt alle seine Mitschüler.

$\neg \exists x (Px \wedge \forall y (Qyx \rightarrow Rxy))$

Px: x ist ein Schüler. Qxy: x ist ein Mitschüler von y.
Rxy: x kennt y

5. Manche Menschen besitzen Autos.

$\exists x (Px \wedge \exists y (Qy \wedge Rxy))$

Px: x ist ein Mensch. Qx: x ist ein Auto.
Rxy: x besitzt y.

6. Nicht jeder Clown liebt eine Seiltänzerin.

$\neg \forall x (Px \rightarrow \exists y (Qy \wedge Rxy))$

Px: x ist ein Clown. Qx: x ist eine Seiltänzerin.
Rxy: x liebt y.

Quantorentausch

(1)	Ein Zahnrad bewegt alle Hebel.	(3)	Nicht alle Studierenden haben alle Aufgaben gelöst.
	$\exists x(Px \land \forall y(Qy \rightarrow Rxy))$		$\neg\forall x(Px \rightarrow \forall y(Qy \rightarrow Rxy))$
	$\exists x(Px \land \neg\exists y(Qy \land \neg Rxy))$		$\neg\forall x(Px \rightarrow \neg\exists y(Qy \land \neg Rxy))$
	$\neg\forall x(Px \rightarrow \neg\forall y(Qy \rightarrow Rxy))$		$\exists x(Px \land \neg\forall y(Qy \rightarrow Rxy))$
	$\neg\forall x(Px \rightarrow \exists y(Qy \land \neg Rxy))$		$\exists x(Px \land \exists y(Qy \land \neg Rxy))$
(2)	Jeder Amerikaner besitzt ein Auto.	(4)	Kein Tutor hat alle Fragen beantwortet.
	$\forall x(Px \rightarrow \exists y(Qy \land Rxy))$		$\neg\exists x(Px \land \forall y(Qy \rightarrow Rxy))$
	$\forall x(Px \rightarrow \neg\forall y(Qy \rightarrow \neg Rxy))$		$\neg\exists x(Px \land \neg\exists y(Qy \land \neg Rxy))$
	$\neg\exists x(Px \land \neg\exists y(Qy \land Rxy))$		$\forall x(Px \land \neg\forall y(Qy \rightarrow Rxy))$
	$\neg\exists x(Px \land \forall y(Qy \rightarrow \neg Rxy))$		$\forall x(Px \land \exists y(Qy \land \neg Rxy))$

Quantorenverschiebung

(1)	**Jeder Matrose kennt einen Kapitän.**	$\forall x(Px \rightarrow \exists y(Qy \wedge Rxy))$
	Px: x ist ein Matrose. / Qx: x ist ein Kapitän. / Rxy: x kennt y.	$\forall x \exists y(Px \rightarrow Qy \wedge Rxy)$
(2)	**Mindestens ein Freund von Ross hat alle Schwestern von Joe geküsst.**	$\exists x(Pxa \wedge \forall y(Qyb \rightarrow Rxy))$
	Pxy: x ist ein Freund von y. / Qxy: x ist eine Schwester von y. / Rxy: x hat y geküsst. a: Ross. / b: Joey	$\exists x \forall y(Pxa \wedge (Qyb \rightarrow Rxy))$
(3)	**Einige Schüler besitzen ein Fahrrad.**	$\exists x(Px \wedge \exists y(Qy \wedge Rxy))$
	Px: x ist ein Schüler. / Qx: x ist ein Fahrrad. / Rxy: x besitzt y.	$\exists x \exists y((Px \wedge Qy) \wedge Rxy)$
(4)	**Alle Götter werden von den (allen) Stammesangehörigen verehrt.**	$\forall x(Px \rightarrow \forall y(Qy \rightarrow Rxy))$
	Px: x ist ein Gott. / Qx: x ist ein Stammesangehöriger. / Rxy: x wird von y verehrt.	$\forall x \forall y(Px \rightarrow (Qy \rightarrow Rxy))$

Formulieren Sie einen Satz, der mindestens einen Quantor enthält.

Giorgione: Die drei Philosophen (1508/09)

Jean-Léon Gérome: Diogenes (1860)

Nachweis der Gültigkeit von Schlüssen im Baumkalkül (Wiederholung)

- Ein Schluss ist ***gültig*** gdw. seine Konklusion aus seinen Prämissen folgt.
- Eine Formel X ***folgt*** aus einer Formel Y bzw. einer Menge von Formeln M gdw. X aus Y bzw. M abgeleitet werden kann.
- Eine ***Ableitung*** einer Formel X aus einer Formel Y ist ein Beweis für Y→X.
- Eine ***Ableitung*** einer Formel X aus einer Menge von Formeln M ist ein Beweis des Konditionals, dessen Antezedens die Konjunktion der Elemente von M ist und dessen Konsequens X ist.
- Ein ***Beweis*** für eine Formel X im Beth- oder Baumkalkül ist ein geschlossener Baum für die Negation von X.
- Im Baumkalkül kann man die prädikatenlogische Gültigkeit eines Schlusses daher überprüfen, indem man einen Baum für die Negation des Konditionals entwickelt, dessen Antezedens die Konjunktion der Prämissen und dessen Konsequens die Konklusion ist.

Beispiel

Es gibt Primzahlen, die kleiner sind als 10. Primzahlen sind keine physikalischen Gegenstände. Also gibt es etwas, das kein physikalischer Gegenstand ist.

Px: x ist eine Primzahl.

Qx: x ist kleiner als 10.*

Rx: x ist ein physikalischer Gegenstand.

* Qxy: x ist kleiner als y.
a: 10
(korrekte und logisch tiefere Analyse, die für den Beweis der Gültigkeit des Schlusses aber nicht erforderlich ist.)

∃x(Px∧Qx) ∧ ∀x(Px→¬Rx) ⇒ ∃x¬Rx

⊢ ∃x(Px∧Qx) ∧ ∀x(Px→¬Rx) → ∃x¬Rx

(1)	$\neg(\exists x(Px \wedge Qx) \wedge \forall x(Px \rightarrow \neg Rx) \rightarrow \exists x \neg Rx)$ ✓		NdF
(2)	$\exists x(Px \wedge Qx) \wedge \forall x(Px \rightarrow \neg Rx)$ ✓		α aus (1)
(3)	$\neg \exists x \neg Rx$ ✓		α aus (1)
(4)	$\exists x(Px \wedge Qx)$ ✓		α aus (2)
(5)	$\forall x(Px \rightarrow \neg Rx)$ ✓		α aus (2)
(6)	$Pa \wedge Qa$ ✓		EB aus (4)
(7)	Pa		α aus (6)
(8)	Qa		α aus (6)
(9)	$Pa \rightarrow \neg Ra$ ✓		AB aus (5)
(10)	$\neg\neg Ra$		AB aus (3)
(11)	$\neg Pa$	$\neg Ra$	β aus (9)
	X	X	

FIN

FV Philosophie UZH

Vollversammlung der Philosophiestudierenden

Montag, 25. November 2019, 18:30
KO2-D-54

Channel Telegram